M.57 Mit den weiteren Abkürzungen $x \equiv BX/XC$, $y \equiv CY/YA$ und $z \equiv AZ/ZB$ sowie denen aus Aufgabe M.56 gilt:

$$u = \frac{1}{y} + z, \qquad v = \frac{1}{z} + x, \qquad w = \frac{1}{x} + y$$

oder – was mit Hilfe des Bildes in Aufgabe M.56 leichter zu merken ist:

$$\frac{AK}{KX} = \frac{AY}{YC} + \frac{AZ}{ZB}, \qquad \frac{BK}{KY} = \frac{BZ}{ZA} + \frac{BX}{XC}, \qquad \frac{CK}{KZ} = \frac{CX}{XB} + \frac{CY}{YA}.$$

M.57 *Beweis:* Da wir die Bezeichnungen der Flächeninhalte Δ_i ($i = 1, 2, \ldots, 6$) in den Aufgaben M.54 und M.56 gleich gewählt haben (vgl. das Bild zur Lösung von Aufgabe M.56), können wir von dort folgende Gleichungen direkt übernehmen:

$$u = \frac{AK}{KX} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_3} = \frac{\Delta_5 + \Delta_6}{\Delta_4} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_5 + \Delta_6}{\Delta_3 + \Delta_4},$$

$$\frac{1}{y} = \frac{AY}{YC} = \frac{\Delta_6}{\Delta_5} = \frac{\Delta_6 + \Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_3 + \Delta_4},$$

$$z = \frac{AZ}{ZB} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{\Delta_5 + \Delta_6 + \Delta_1}{\Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_2} = \frac{\Delta_5 + \Delta_6}{\Delta_3 + \Delta_4}.$$

Die Gleichung $u = 1/y + z$ folgt offensichtlich. Durch zyklisches Vertauschen erhalten wir auch die beiden anderen Beziehungen. □

Bemerkung: Ist K der *Schwerpunkt* des Dreiecks, so folgt unmittelbar $x = y = z = 1$. Somit ist $u = v = w = 2$, d. h., die Seitenhalbierenden werden durch K im Verhältnis $2 : 1$ geteilt (vgl. Aufgabe D.10).