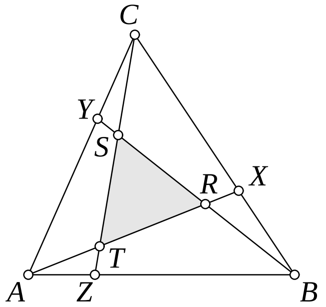
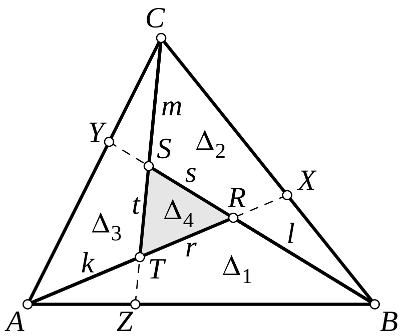
M.58 **Satz von Routh.** (Bild) Wenn drei Ecktransversalen eines Dreiecks ABC sich nicht in einem Punkt, sondern in drei verschiedenen Punkten schneiden, schließen sie ein Dreieck RST im Innern von $\triangle ABC$ ein. Bezeichnet man die Abschnittsverhältnisse, die die Ecktransversalen auf ihren Gegenseiten bilden, mit $x \equiv BX/XC$, $y \equiv CY/YA$ bzw. $z \equiv AZ/ZB$, so gilt für das Verhältnis der Flächeninhalte:



$$\frac{[RST]}{[ABC]} = \frac{(1 - xyz)^2}{(xy + x + 1)(yz + y + 1)(zx + z + 1)}. \tag{M.10}$$

M.58 *Beweis:* (Bild) Um das Flächenprinzip vorteilhaft anwenden zu können, müssen wir eine geeignete Zerlegung des Dreiecks ABC finden. Je weniger Teilflächen wir benötigen, desto übersichtlicher wird der Beweis. Es zeigt sich, daß wir außer $[RST] = \Delta_4$ lediglich 3 weitere Dreiecke betrachten müssen, deren Flächeninhalte wir mit $[ARB] = \Delta_1$, $[BSC] = \Delta_2$ und $[CTA] = \Delta_3$ bezeichnen. Außerdem sei $AT = k$, $BR = l$, $CS = m$, $TR = r$, $RS = s$ und $ST = t$. Jetzt wenden wir den Satz des gemeinsamen (Ergänzungs-) Winkels an und lesen folgende Gleichungen aus dem Bild ab:



$$\frac{\Delta_1}{\Delta_4} = \frac{(r+k)l}{rs}, \qquad \frac{\Delta_2}{\Delta_4} = \frac{(s+l)m}{st}, \qquad \frac{\Delta_3}{\Delta_4} = \frac{(t+m)k}{tr}. \tag{M.106}$$

Um die gegebenen Verhältnisse x, y, z ins Spiel zu bringen, bemühen wir den Satz von Menelaus: S, T, Z liegen auf einer Geraden und gleichzeitig auf den Dreieckseiten von $\triangle ABR$. Somit gilt

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BS}{SR} \cdot \frac{RT}{TA} = -1 \qquad \text{oder} \qquad z = \frac{AZ}{ZB} = \frac{RS}{BS} \cdot \frac{TA}{RT} = \frac{sk}{(s+l)r}. \tag{M.107a}$$

Durch zyklische Vertauschung von (x,y,z), (r,s,t) bzw. (k,l,m) finden wir weiterhin

$$x = \frac{tl}{(t+m)s}, \qquad y = \frac{rm}{(r+k)t}. \tag{M.107b,c}$$

Die Gleichungen (M.107) stellen ein lineares Gleichungssystem für k, l, m dar, dessen Lösung sich leicht errechnen läßt:

$$k = \frac{(xy+x+1)zr}{1-xyz}, \qquad l = \frac{(yz+y+1)xs}{1-xyz}, \qquad m = \frac{(zx+z+1)yt}{1-xyz}. \tag{M.108}$$

Nun werden erst (M.107) und anschließend (M.108) in die Ausdrücke (M.106) substituiert:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_4} = \frac{lm}{yst} = \frac{(yz+y+1)(zx+z+1)x}{(1-xyz)^2},$$

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_4} = \frac{mk}{ztr} = \frac{(zx+z+1)(xy+x+1)y}{(1-xyz)^2},$$

$$\frac{\Delta_3}{\Delta_4} = \frac{kl}{xrs} = \frac{(xy+x+1)(yz+y+1)z}{(1-xyz)^2}.$$

Aus der Addition aller drei Gleichungen folgt nach Ausmultiplizieren und erneutem Zusammenfassen

$$\frac{[ABC]}{[RST]} = 1 + \frac{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3}{\Delta_4} = \frac{(xy+x+1)(yz+y+1)(zx+z+1)}{(1-xyz)^2}. \quad \square$$

Bemerkung: Für $x = y = z = n = 2,3,4,5,6,7,8,9,10,\ldots$ wird das Verhältnis der Flächeninhalte

$$\frac{[RST]}{[ABC]} = \frac{(n-1)^2}{n^2+n+1} = \frac{1}{7}, \frac{4}{13}, \frac{3}{7}, \frac{16}{31}, \frac{25}{43}, \frac{12}{19}, \frac{49}{73}, \frac{64}{91}, \frac{27}{37}, \ldots.$$