$\boxed{\text{M.61}}$ P sei ein beliebiger Punkt im Innern eines Dreiecks ABC. Die Verlängerungen von AP, BP und CP schneiden die jeweils gegenüberliegenden Dreieckseiten in den Punkten X, Y bzw. Z. Man beweise folgende Ungleichung:

$$\frac{PA}{PX} \cdot \frac{PB}{PY} + \frac{PB}{PY} \cdot \frac{PC}{PZ} + \frac{PC}{PZ} \cdot \frac{PA}{PX} \geq 12.$$

([Wil96], *No. 46*)

M.61 *Beweis:* Mit den bisher üblichen Abkürzungen $u = PA/PX$, $v = PB/PY$, $w = PC/PZ$ lautet die zu beweisende Ungleichung $uv + vw + wu \geq 12$. Nun gilt nach dem Satz von Euler-Gergonne (s. Aufgabe M.56)

$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w} = 1 \qquad \text{oder} \qquad uvw = u + v + w + 2; \tag{M.111}$$

die darin auftretende Summe von Reziproken läßt sich mit der AM-HM-Ungleichung (vgl. Aufgabe U.17) abschätzen:

$$(1 + u + 1 + v + 1 + w)\left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w}\right) \geq 9. \tag{M.112}$$

Einsetzen von (M.112) in (M.111) liefert zunächst

$$u + v + w \geq 6, \qquad \text{und} \qquad uvw \geq 8. \tag{M.113}$$

Für den letzten Schritt wenden wir die AM-GM-Ungleichung (vgl. Aufgabe U.15) in Verbindung mit dem Zwischenergebnis (M.113) an:

$$uv + vw + wu \geq 3(uvw)^{\frac{2}{3}} \geq 3 \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 12. \ \square$$