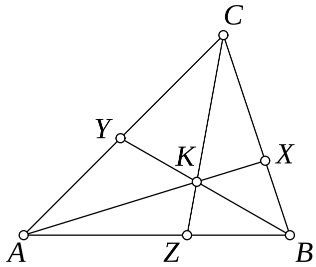
M.62 Im spitzwinkligen Dreieck ABC seien D, E, F die Fußpunkte der Höhen auf den Seiten BC, CA und AB sowie H der Höhenschnittpunkt. Man beweise:

$$\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 2.$$

(*Australien, 1993*)

M.62 *Beweis:* (Bild) Wir beweisen den allgemeineren Fall, daß die angegebene Gleichung für *jeden beliebigen* Schnittpunkt K dreier Ecktransversalen AX, BY und CZ gilt. In der Notation von Aufgabe M.56 ist dann



$$\frac{AK}{AX} = \frac{u}{1+u}, \quad \frac{BK}{BY} = \frac{v}{1+v}, \quad \frac{CK}{CZ} = \frac{w}{1+w}.$$

Nach dem Satz von EULER-GERGONNE gilt aber (s. Aufgabe M.56)

$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w} = 1,$$

so daß

$$\begin{aligned} 3 - 1 &= \left(\frac{1+u}{1+u} + \frac{1+v}{1+v} + \frac{1+w}{1+w}\right) - \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w}\right) \\ &= \frac{u}{1+u} + \frac{v}{1+v} + \frac{w}{1+w} = \frac{AK}{AX} + \frac{BK}{BY} + \frac{CK}{CZ} = 2. \ \square \end{aligned}$$