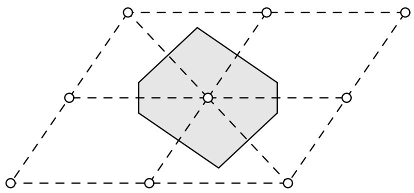
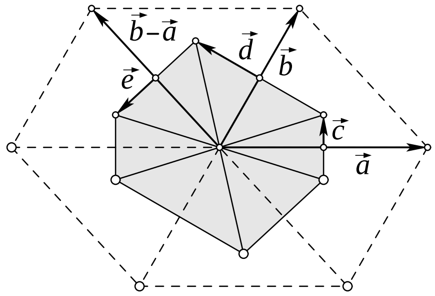
M.9 **Wigner-Seitz-Zelle.** (Bild) In einem schiefwinkligen, ebenen Gitter bilden jeweils vier Punkte ein Parallelogramm – das kleinste von ihnen ist die *Elementarzelle* des Gitters. Greift man sich einen beliebigen Gitterpunkt heraus und zeichnet die Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecken zu den sechs nächsten Nachbarn, so beranden diese Geraden ein Gebiet, das man WIGNER-SEITZ-*Zelle* (WSZ) nennt. Man zeige, daß die Elementarzelle und die WSZ den gleichen Flächeninhalt haben.



M.9 *Beweis:* (Bild) Wir zerlegen die WSZ in drei Paare kongruenter Dreiecke und führen neben den Basisvektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, die das Punktgitter aufspannen, noch die Hilfsvektoren $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ und $\boldsymbol{e}$ wie im Bild gezeigt ein. Nun können wir die Flächeninhalte der Dreiecke als Beträge der Vektorprodukte $\boldsymbol{A}_1 \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{A}_2 \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$ und $\boldsymbol{A}_3 \equiv [\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})]\times\boldsymbol{e}$ betrachten. Für die gesamte Fläche $\boldsymbol{A} \equiv 2(\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3)$ der WSZ erhalten wir somit



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= 2\left[\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}}{2} + \frac{\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}}{2} + \frac{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{e}}{2}\right] \\
&= (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}) + (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{e}) - (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{e}) \\
&= \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{e}) + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}).
\end{aligned}
$$

Aus dem Bild ist leicht zu erkennen, daß $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{e} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$ gilt, so daß

$$
\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}\times\frac{\boldsymbol{b}}{2} + \boldsymbol{b}\times\frac{-\boldsymbol{a}}{2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}
$$

wird. Dies ist genau der Flächenvektor, der von der Elementarzelle aufgespannt wird. □