T.5 Identitäten

Es gibt Gleichungen in allen Zweigen der Mathematik, denen nicht unmittelbar anzusehen ist, daß sie gelten. Sie werden üblicherweise als *Identitäten* bezeichnet und lassen sich immer in der Form $A = B$ schreiben. Bei vielen reicht ein (mitunter mühsames) Ausrechnen zum Nachweis; andere erfordern spezielle Methoden. Ein herausragendes Buch zu diesem Thema ist [Pet96], das nicht zufällig diesen Titel trägt: $A = B$.

Einleitend für die nachfolgende Übersicht geben wir die „schönste" mathematische Formel aller Zeiten an, die die vier Zahlen 0, 1, e und π miteinander verknüpft:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0. \tag{T.40}$$

T.5.1 Algebraische Identitäten

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \tag{T.41}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2), \tag{T.42}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2), \tag{T.43}$$

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2+b^2), \tag{T.44}$$

$$a^4 + 4b^4 = (a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2), \tag{T.45}$$

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4), \tag{T.46}$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4), \tag{T.47}$$

$$a^6 - b^6 = (a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2), \tag{T.48}$$

$$a^6 + b^6 = (a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4), \tag{T.49}$$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2), \tag{T.50}$$

$$(a^2 - xb^2)(c^2 - xd^2) = (ac+xbd)^2 - x(ad+bc)^2, \tag{T.51}$$

$$(a^2 + xb^2)(c^2 + xd^2) = (ac \pm xbd)^2 + x(ad \mp bc)^2, \tag{T.52}$$

$$(a+b+c)^7 - (a^7+b^7+c^7) = 7(b+c)(c+a)(a+b) \times \\ [(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)^2 + abc(a+b+c)], \tag{T.53}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab, \tag{T.54}$$

$$a\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + c = 0, \quad (a \neq 0), \tag{T.55}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\right) \\ = \sum_{1\le i<j\le n} \frac{(a_ib_j - a_jb_i)^2}{(a_i+b_i)(a_j+b_j)}. \tag{T.56}$$

Fibonaccische Identität.

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = (ad-bc)^2 + (ac+bd)^2. \tag{T.57}$$

Cauchy-Lagrange-Identität. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 = \\ = \sum_{1\le i<j\le n} (a_ib_j - a_jb_i)^2 \\ = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + \cdots + (a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1})^2. \tag{T.58}$$

Eulers 4-Quadrat-Identität.

$$\begin{aligned}(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2) &= \\ &= (a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4)^2+(a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)^2+ \\ &\quad (a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1-a_4b_3)^2+(a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1)^2= \\ &= (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)^2+(a_1b_2-a_2b_1-a_3b_4+a_4b_3)^2+ \\ &\quad (a_1b_3+a_2b_4-a_3b_1-a_4b_3)^2+(a_1b_4-a_2b_3+a_3b_2-a_4b_1)^2. \end{aligned} \tag{T.59}$$

Ferraris Identität.

$$\begin{aligned}(a^2+2ac-2bc-b^2)^4+(b^2-2ab-2ac-c^2)^4+(c^2+2ab+2bc-a^2)^4 &= \\ &= 2(a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc)^4. \end{aligned} \tag{T.60}$$

Mit σ_k $(k=1,2,\ldots,n)$ als elementare symmetrische Funktionen der n Variablen $x_1,\ldots,x_n$ (s. Abschnitt U.4) sowie $s_k \equiv x_1^k+\cdots+x_n^k$ gilt:

$$\sigma_1^2 = s_2 + 2\,\sigma_2. \tag{T.61}$$

Eulersche Identität. Für $|z|<1$ gilt:

$$\prod_{p=1}^{\infty}(1+z^p) = \prod_{q=1}^{\infty}(1-z^{2q-1})^{-1}. \tag{T.62}$$

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m^2}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} = \prod_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{5m+1})(1-x^{5m+4})}. \tag{T.63}$$

Jacobische Determinanten-Identität. Es sei

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \mathsf{B} & \mathsf{D} \\ \mathsf{E} & \mathsf{C} \end{bmatrix}, \qquad \mathsf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathsf{W} & \mathsf{X} \\ \mathsf{Y} & \mathsf{Z} \end{bmatrix},$$

wobei B und W $k\times k$-Matrizen seien. Dann gilt:

$$(\det \mathsf{Z})(\det \mathsf{A}) = \det \mathsf{B}. \tag{T.64}$$