$\boxed{\text{U.11}}$ **Bernoullische Ungleichung.** Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq -1$. Dann gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{U.19}$$

Gleichheit liegt genau dann vor, wenn $n = 1$ oder $x = 0$ ist.

U.11 *Beweis:* Wir führen den Beweis über die vollständige Induktion. Mit $\mathcal{P}(n)$ bezeichnen wir dazu die Behauptung: $x \geq -1 \Longrightarrow (1+x)^n \geq 1+nx$ mit Gleichheit genau für $n=1$ oder $x=0$. Dann ist $\mathcal{P}(1)$ trivialerweise erfüllt. Nun sei vorausgesetzt, daß $\mathcal{P}(n)$ für $n>1$ erfüllt ist. Wir bemerken, daß als Bedingung für Gleichheit in $\mathcal{P}(n+1)$ wegen $n+1 \neq 1$ nur $x=0$ in Frage kommt. Multiplizieren wir die Voraussetzung mit der nichtnegativen Zahl $1+x$, erhalten wir

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x. \tag{U.101}$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (U.101) genau für $nx^2=0$, somit genau für $x=0$. $\square$