$\boxed{\text{U.12}}$ **(Verallgemeinerte) Bernoullische Ungleichungen.** Es sei $-1 < x \neq 0$. Dann gilt:

$$(1+x)^a > 1 + ax \quad \text{für} \quad a > 1 \ \text{ oder } \ a < 0, \tag{U.20}$$

$$(1+x)^a < 1 + ax \quad \text{für} \quad 0 < a < 1. \tag{U.21}$$

U.12 *Beweis:* Wir entwickeln $f(x) = (1+x)^a$ nach der TAYLORschen Formel in eine Reihe und brechen diese nach dem linearen Glied ab:

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)x^2}{2}(1+\theta x)^{a-2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Wegen $x > -1$ ist $1 + \theta x > 0$ und das Vorzeichen

$$\operatorname{sgn}[(1+x)^a - 1 - ax] = \operatorname{sgn}[a(a-1)] = \begin{cases} -1 < 0, & \text{für} \quad 0 < a < 1, \\ +1 > 0, & \text{für} \quad a > 1 \ \text{ oder } \ a < 0, \end{cases}$$

beides für $x \neq 0$. $\square$