U.13 **Dreiecksungleichung.** Es seien $z_1, \ldots, z_n$ von null verschiedene komplexe Zahlen. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i| \geq \left| \sum_{i=1}^{n} z_i \right| . \tag{U.22}$$

Das Gleichheitszeichen gilt, wenn die Argumente aller z_i untereinander gleich sind.

U.13 *Beweis:* Der Fall $n = 1$ ist trivial. Deshalb nehmen wir $n = 2$ als Induktionsanfang. Zunächst benötigen wir einige elementare Beziehungen beim Rechnen mit komplexen Zahlen. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\Re[z] = x \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \quad \text{und analog} \quad \Im[z] = y \leq |z|. \tag{U.102}$$

Weiterhin ist

$$|\overline{z}| = |z|, \quad |z|^2 = z\overline{z}, \quad \Re[z] = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \Im[z] = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z}), \quad |z_1\overline{z_2}| = |z_1||z_2|.$$

Diese Beziehungen benutzen wir, um $|z_1 + z_2|^2$ zu berechnen:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\Re[z_1\overline{z_2}].$$

Den letzten Summanden können wir nun mit (U.102) abschätzen:

$$2\,\Re[z_1\overline{z_2}] \leq 2|z_1\overline{z_2}| = 2|z_1||z_2|. \tag{U.103}$$

Damit wird

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Nun können wir die Wurzel ziehen, und – da beide Seiten positiv sind – bleibt das Relationszeichen erhalten (vgl. (U.11)):

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{U.104}$$

Allgemein haben wir also als Induktionsbeweis:

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} z_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} z_i + z_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| + |z_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i| + |z_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|. \tag{U.105}$$

Gleichheit gilt in (U.105) nur, wenn sie für jedes Paar z_i, z_j in (U.103) erfüllt ist. Dies führt nach kurzer Rechnung auf die Bedingung, daß alle Argumente $\arg z$ (Winkel gegenüber der reellen Achse) untereinander gleich sein müssen:

$$\arg z_1 = \arctan\frac{y_1}{x_1} = \cdots = \arg z_n = \arctan\frac{y_n}{x_n},$$

gleichbedeutend damit, daß alle z_i auf einer durch den Ursprung der komplexen Zahlenebene gehenden Geraden liegen. $\square$

Bemerkung: Ebenso erhalten wir

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\,\Re[z_1\overline{z_2}] \geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| = (|z_1| - |z_2|)^2,$$

also in Kombination mit (U.104)

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{U.106}$$

Geometrisch interpretiert bedeutet die Ungleichungskette (U.106), daß die Länge jeder Dreieckseite einerseits immer *kürzer als die Summe* und andererseits immer *länger als die Differenz* der beiden anderen Seiten ist.