**U.16** **GM-HM-Ungleichung.** Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Dann ist das geometrische Mittel $\mathcal{G}_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dieser Zahlen stets größer oder gleich dem *harmonischen Mittel* $\mathcal{H}_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$:

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \qquad \text{oder} \qquad \mathcal{G}_n \geq \mathcal{H}_n. \tag{U.25}$$

Gleichheit liegt genau dann vor, wenn alle $a_i$ untereinander gleich sind.

U.16 *Beweis:* Wir wenden die AM-GM-Ungleichung auf die Reziproken $1/a_i$ an. $\square$