U.20 **(Verallgemeinerte) Höldersche Ungleichungen.** Angenommen, a_{ij} seien von null verschiedene reelle Zahlen für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$. Weiterhin seien $p_1, \ldots, p_m$ bzw. $q_1, \ldots, q_n$ positive reelle Zahlen (Gewichte) mit $p_1 + \cdots + p_m = 1$ und $q_1 + \cdots + q_n = 1$. Für jedes i bzw. j seien die Zeilensummen R_i bzw. Spaltensummen C_j definiert:

$$R_i \equiv \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad C_j \equiv \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

Dann gilt:

$$R_1^{p_1} \cdots R_m^{p_m} \geq \sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|^{p_1} \cdots |a_{mj}|^{p_m} \quad \text{und} \tag{U.34}$$

$$C_1^{q_1} \cdots C_n^{q_n} \geq \sum_{i=1}^{m} |a_{i1}|^{q_1} \cdots |a_{in}|^{q_n}. \tag{U.35}$$

Gleichheit liegt dann und nur dann in (U.34) vor, wenn alle Paare von Spaltenvektoren $(|a_{1j}|, \ldots, |a_{mj}|)^{\mathrm{T}}$ untereinander proportional sind; dagegen in (U.35), wenn paarweise alle Zeilenvektoren $(|a_{i1}|, \ldots, |a_{in}|)$ proportional sind.

U.20 *Beweis:* Wie die folgende Rechnung zeigt, sind die HÖLDERschen Ungleichungen eine direkte Folgerung aus der gewichteten AM-GM-Ungleichung (U.23), wenn letztere auf jeden, in den eckigen Klammern stehenden Summanden angewendet wird:

$$\begin{aligned}\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{1j}|^{p_1} \cdots |a_{mj}|^{p_m}}{R_1^{p_1} \cdots R_m^{p_m}} &= \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{|a_{1j}|}{R_1} \right)^{p_1} \cdots \left(\frac{|a_{mj}|}{R_m} \right)^{p_m} \right] \\ &\le \sum_{j=1}^{n} \left[p_1 \frac{|a_{1j}|}{R_1} + \cdots + p_m \frac{|a_{mj}|}{R_m} \right] = p_1 + \cdots + p_m = 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} |a_{i1}|^{q_1} \cdots |a_{in}|^{q_n}}{C_1^{q_1} \cdots C_n^{q_n}} &= \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\frac{|a_{i1}|}{C_1} \right)^{q_1} \cdots \left(\frac{|a_{in}|}{C_n} \right)^{q_n} \right] \\ &\le \sum_{i=1}^{m} \left[q_1 \frac{|a_{i1}|}{C_1} + \cdots + q_n \frac{|a_{in}|}{C_n} \right] = q_1 + \cdots + q_n = 1.\end{aligned}$$

Nach der AM-GM-Ungleichung gilt Gleichheit genau dann in (U.34), wenn für alle j

$$\frac{|a_{1j}|}{R_1} = \cdots = \frac{|a_{mj}|}{R_m} = \lambda_j = \text{const}$$

bzw. $|a_{ij}| = \lambda_j R_i$ ist. Dies ist gleichbedeutend mit $|a_{kj}|/|a_{lj}| = R_k/R_l = \text{const}$ für alle Paare (k,l) *unabhängig von* j, welches Proportionalität zwischen allen Spaltenvektoren der Matrix $[|a_{ij}|]$ bedeutet. Analog bestätigen wir die Gleichheitsbedingung in (U.35). □