U.22 **Minkowskische Ungleichung.** Für alle reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ sowie $p \geq 1$ gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{U.37}$$

Gleichheit ist genau dann erfüllt, wenn die $|a_i|$ und $|b_i|$ proportional sind, d. h. $|b_i| = \lambda |a_i|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, für alle i gilt.

U.22 *Beweis:* Für $p = 1$ folgt die Behauptung direkt aus der Dreiecksungleichung (U.22). Im Fall $p > 1$ wählen wir eine Zahl $q > 1$ derart, daß die Relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ erfüllt ist. Nehmen wir die HÖLDERsche Ungleichung (U.36) in der Form

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i \beta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

und setzen einmal $\alpha_i \equiv |a_i|$, $\beta_i \equiv |a_i + b_i|^{\frac{p}{q}}$ und ein weiteres Mal $\alpha_i \equiv |b_i|$, $\beta_i \equiv |a_i + b_i|^{\frac{p}{q}}$ ein, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i||a_i + b_i|^{\frac{p}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{bzw.} \tag{U.109}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i||a_i + b_i|^{\frac{p}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{U.110}$$

Wegen $p = 1 + \frac{p}{q}$ ist weiterhin für jedes i nach der Dreiecksungleichung

$$|a_i + b_i|^p = |a_i + b_i||a_i + b_i|^{\frac{p}{q}} \leq |a_i||a_i + b_i|^{\frac{p}{q}} + |b_i||a_i + b_i|^{\frac{p}{q}}. \tag{U.111}$$

Summieren wir über die Terme (U.111) und benutzen dabei (U.109) und (U.110), folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{U.112}$$

Der zweite Faktor auf der rechten Seite von (U.112) verschwindet gewiß nicht (sonst wäre die Behauptung offensichtlich), so daß nach Division durch diesen (U.37) folgt. □