U.24 **Tschebyscheffsche Ungleichung.** Angenommen, $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ seien gleichsinnig geordnete reelle Zahlen:

$$\begin{cases} a_1 \leq \cdots \leq a_n, \\ b_1 \leq \cdots \leq b_n, \end{cases} \qquad \text{oder} \qquad \begin{cases} a_1 \geq \cdots \geq a_n, \\ b_1 \geq \cdots \geq b_n. \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i \right). \tag{U.39}$$

Gleichheit gilt genau für $a_1 = \cdots = a_n$ oder $b_1 = \cdots = b_n$.

U.24 *Beweis:* In beiden Fällen gilt bezüglich der jeweiligen Ordnung der Zahlen a_i und b_i für jedes Paar (i, j)

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0. \tag{U.113}$$

Summation über beide Indizes und Ausmultiplizieren führt auf die Behauptung:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \sum_{j=1}^{n} (1) - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \sum_{i=1}^{n} (1) \geq 0 \qquad \text{oder}$$

$$2n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - 2 \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i \geq 0.$$

Aus (U.113) erkennen wir, daß das Gleichheitszeichen für $a_i = a_j$ oder $b_i = b_j$ für alle Paare (i, j), also $a_1 = \cdots = a_n$ oder $b_1 = \cdots = b_n$ gilt. $\square$