$\boxed{\textsf{U.34}}$ Es seien $a$, $b$ und $c$ beliebige positive reelle Zahlen. Zeige, daß

a) $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$;

b) $abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$.

(*Großbritannien, 1981*)

**U.34** *Beweise:* a) Wir können o. B. d. A. annehmen, daß $c$ die größte Zahl ist. Dann ist

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-(a^2b+b^2c+c^2a) &= a^3-a^2b+b^3-b^2c+c^3-c^2a \\ &= a^2(a-b)+b^2(b-c)+c^2(c-a) \\ &= a^2(a-b)-b^2(a-b+c-a)+c^2(c-a) \\ &= (a^2-b^2)(a-b)+(c^2-b^2)(c-a) \\ &= (a-b)^2(a+b)+(c-b)(c-a)(c+b) \geq 0 \end{aligned}$$

wegen $c \geq b$ und $c \geq a$. b) Siehe die Lehmus-Ungleichung, Aufgabe **G.11**. $\square$