$\boxed{\text{U.35}}$ Man zeige, daß folgende Ungleichung gilt:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^+.$$

U.35 *Beweis:* Die Teile $a^4 + b^4 + c^4$ und a^2bc sind nicht so offensichtlich in einer einfacheren Ungleichung unterzubringen, wohl aber

$$2a^4 + b^4 + c^4 = a^4 + a^4 + b^4 + c^4 \geq 4a^2bc. \tag{U.116}$$

Letztere folgt aus der AM-GM-Ungleichung $w + x + y + z \geq 4\sqrt[4]{wxyz}$, wenn wir dort $w = a^4$, $x = a^4$, $y = b^4$ und $z = c^4$ einsetzen, oder direkt aus der gewichteten AM-GM-Ungleichung

$$\frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{4}c^4 \geq (a^4)^{\frac{1}{2}} \cdot (b^4)^{\frac{1}{4}} \cdot (c^4)^{\frac{1}{4}} = a^2bc.$$

Nun können wir die Variablen in (U.116) zyklisch vertauschen, anschließend die vier Ungleichungen addieren und durch 4 dividieren. $\square$