$\boxed{\text{U.37}}$ Man beweise

$$\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq \frac{8}{abc}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^{+}.$$

U.37 *Beweis:* Was für das Aufteilen von Summen gilt, kann ggf. auch mit Produkten – wie auf der rechten Seite der vorliegenden Ungleichung – probiert werden:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$$

wäre die naheliegende Vermutung, die sich auch sofort mittels der Mutter aller Ungleichungen, diesmal in der Form $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, bestätigt. Zyklische Vertauschung der Variablen und Multiplikation der drei Ungleichungen liefert die Behauptung. $\square$