$\boxed{\textsf{U.38}}$ Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}.$$

U.38 *Beweis:* Manchmal ist das Vorgehen zu rigoros: Nehmen wir z. B. $x^2/y^2 \geq y/x$ heraus, führt das auf $x \geq y$ bzw. bei den anderen Termen auf $y \geq z$ und $z \geq x$. Zwei dieser Ungleichungen lassen sich mühelos erfüllen, alle drei aber nicht. Deshalb versuchen wir, etwas mehr zu „greifen“:

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} \geq 2\,\frac{x}{z}.$$

Nun ist es nicht schwer zu erkennen, daß die Behauptung äquivalent ist zur Ungleichung

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 \geq 0,$$

welche zweifellos wahr ist. Gleichheit liegt bei $x = y = z$ vor. $\square$