$\boxed{\text{U.40}}$ Zeige, daß für $0 \leq a, b, c \leq 1$ gilt:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

(*USA, 1980*)

U.40 *Beweis:* Die Symmetrie in den Variablen a, b und c ist augenscheinlich, mithin nehmen wir $0 \le a \le b \le c \le 1$ an. Damit läßt sich die Summe der Brüche auf der linken Seite durch

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} \le \frac{a+b+c}{a+b+1}$$

abschätzen[†]. Das Ziel ist es nun, möglichst überall Faktoren der Form $(1-a) \ge 0$ zu erzeugen, und da hilft nur etwas Probieren:

$$\begin{aligned}
\frac{a+b+c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) &= \frac{a+b+1}{a+b+1} - \frac{1-c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \\
&= 1 - \left(\frac{1-c}{a+b+1}\right)[1-(1+a+b)(1-a)(1-b)] \\
&\le 1 - \left(\frac{1-c}{a+b+1}\right)[1-(1+a+b+ab)(1-a)(1-b)] \\
&= 1 - \left(\frac{1-c}{a+b+1}\right)[1-(1+a)(1+b)(1-a)(1-b)] \\
&= 1 - \left(\frac{1-c}{a+b+1}\right)[1-(1-a^2)(1-b^2)] \le 1. \quad \square
\end{aligned}$$

[†]Es besteht bei solchen Abschätzungen keine Gewähr, daß sie zum Ziel führen, da sie häufig zu kraß sind. Aber wir stellen ja Tips und Tricks vor.