$\boxed{\mathsf{U.42}}$ Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x^4(1 + y^4) + y^4(1 + z^4) + z^4(1 + x^4) \geq 6x^2y^2z^2.$$

U.42 *Beweis:* Zweimalige Anwendung der AM-GM-Ungleichung ergibt mit $1 + x^4 \geq 2x^2$

$$\begin{aligned} x^4(1+y^4) + y^4(1+z^4) + z^4(1+x^4) &\geq 3(xyz)^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{(1+x^4)(1+y^4)(1+z^4)} \\ &\geq 3(xyz)^{\frac{4}{3}} \cdot 2(xyz)^{\frac{2}{3}} = 6(xyz)^2. \ \square \end{aligned}$$