$\boxed{\mathsf{U.44}}$ Man bestimme alle reelle Zahlen e, die mit gegebenen a, b, c, d die Gleichungen

$$a + b + c + d + e = 7,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 13$$

erfüllen.

U.44 Bringen wir die bekannten Größen a, b, c, d auf die rechten Seiten der beiden Gleichungen, erhalten wir

$$7 - e = a + b + c + d, \tag{U.119}$$

$$13 - e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \tag{U.120}$$

zwischen denen nach CAUCHY-SCHWARZ die Ungleichung vom Typ c)

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq \frac{1}{4}(a + b + c + d)^2 \tag{U.121}$$

besteht. Dies wird sofort klar, wenn wir die Vektoren $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \equiv (a, b, c, d)$ und $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \equiv (1, 1, 1, 1)$ betrachten. (U.119) und (U.120) in (U.121) eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned}
4(13 - e^2) &\geq (7 - e)^2, \\
52 - 4e^2 &\geq 49 - 14e + e^2, \\
0 &\geq 5e^2 - 14e - 3, \\
0 &\geq e^2 - \frac{14}{5}e - \frac{3}{5}, \\
\frac{49}{25} &\geq \left(e - \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{15}{25}, \\
\frac{8}{5} &\geq \left|e - \frac{7}{5}\right| .
\end{aligned}$$

Nun machen wir die erforderliche Fallunterscheidung:
1. $e \geq \frac{7}{5}$ (und die Betragsstriche können wegfallen) liefert $e \leq 3$, also zusammen $\frac{7}{5} \leq e \leq 3$.
2. $e \leq \frac{7}{5}$ (und der Betrag ist $\frac{7}{5} - e$) ergibt $e \geq -\frac{1}{5}$, also $-\frac{1}{5} \leq e \leq \frac{7}{5}$.
Beide Fälle können somit zur Lösung $e \in [-\frac{1}{5}, 3]$ zusammengefaßt werden.