$\boxed{\mathsf{U.46}}$ Für alle $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_1.$$

U.46 *Beweis:* Der Typ d) mit $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$ läßt sich am einfachsten realisieren, wenn die Elemente des Vektors $\boldsymbol{u}$ gleich denen des Vektors $\boldsymbol{v}$ sind, jedoch zyklisch verschoben werden. Bei der vorliegenden Ungleichung ist also

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \equiv (a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1).$$

Diese zyklische Verschiebung hat keine Änderung der Summe der Quadrate in $\boldsymbol{u}^2$ zur Folge, so daß $\boldsymbol{u}^2 = \boldsymbol{v}^2$ bzw. $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$ gilt und auf beiden Seiten der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung die Wurzel gezogen werden kann:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \boldsymbol{u}^2 \geq \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_1). \quad \square$$