$\boxed{\textsf{U.49}}$ Für alle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt folgende Ungleichung:

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{3}{2}.$$

U.49 *Beweis:* Obwohl hier die Zähler auf den ersten Blick nicht gleich sind, gelangen wir trotzdem dorthin, wenn einfach drei „nahrhafte Einsen“ in Form von

$$\frac{b^2+c^2}{b^2+c^2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+a^2}+\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=3$$

auf beiden Seiten addiert werden:

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}+\frac{1}{a^2+b^2}\right)\geq\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}.$$

Diese Ungleichung folgt nun direkt aus der AM-HM-Ungleichung. □

Bemerkung: Der „AM-HM-Trick“ funktioniert also auch, falls bei allen gebrochenen Summanden die Summe aus Zähler und Nenner untereinander gleich ist.