$\boxed{\textsf{U.53}}$ a, b, c seien positive reelle Zahlen, die die Gleichung $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ erfüllen. Man zeige $abc \leq 1$.

U.53 *Beweis:* Ein Ausmultiplizieren der Nebenbedingung ergibt

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 1 + (a+b+c) + (bc+ca+ab) + abc = 8.$$

Da abc unser Zielausdruck ist, müssen wir die Terme $(a+b+c)$ und $(bc+ca+ab)$ durch abc abschätzen. Dabei hilft uns natürlich AM-GM:

$$a+b+c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}, \qquad bc+ca+ab \geq 3(abc)^{\frac{2}{3}},$$

mit deren Hilfe aus der Nebenbedingung

$$8 = (1+a)(1+b)(1+c) \geq 1 + 3(abc)^{\frac{1}{3}} + 3(abc)^{\frac{2}{3}} + abc = \left[1 + (abc)^{\frac{1}{3}}\right]^3$$

wird. Daraus folgt $2 \geq 1 + \sqrt[3]{abc}$ und schließlich $abc \leq 1$. $\square$