$\boxed{\text{U.54}}$ Beweise, daß der Würfel von allen Quadern a) das größte Volumen bei konstanter Oberfläche und b) den kleinsten Oberflächeninhalt bei konstantem Volumen hat.

U.54 *Beweis:* Die Kantenlängen des Quaders seien mit a, b, c bezeichnet, sein Volumen ist $V = abc$ und seine Oberfläche beträgt $A = 2(bc+ca+ab)$. Wir suchen eine Ungleichung zwischen A und V, die wir bereits in der Lösung zu Aufgabe U.53 mittels AM-GM gefunden haben:

$$bc + ca + ab \geq 3(abc)^{\frac{2}{3}}, \qquad \text{oder} \qquad A \geq 6V^{\frac{2}{3}}$$

mit Gleichheit nur bei $bc = ca = ab$ bzw. (äquivalent dazu) $a = b = c$. Ist also im Fall a) A fest, wird das größte Volumen $V = (A/6)^{\frac{3}{2}}$ für $a = b = c$ (der Würfel) bzw. b) V fest, die kleinste Oberfläche $A = 6V^{\frac{2}{3}}$ ebenfalls für $a = b = c$ angenommen. □