U.55 Man beweise: Für alle positiven reellen Zahlen a und b mit $a+b=1$ gilt

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

(*10. Mathematik-Olympiade 1970/71, Klasse 11–12, Stufe 1*)

U.55 *Beweis:* Ein bloßes Abschätzen des gegebenen Ausdrucks $\mathcal{E}$ mittels (U.45) führt ohne Berücksichtigung der Nebenbedingung lediglich auf die schwächere Ungleichung $\mathcal{E} \geq 8$. Um zur Verschärfung die Nebenbedingung $a + b = 1$ ins Spiel zu bringen, bemühen wir zunächst die RMS-Ungleichung und anschließend die AM-HM-Ungleichung:

$$\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}} = \sqrt{\frac{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2}{2}} \geq \frac{\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right)}{2} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1}{2} \geq \frac{\frac{4}{a+b} + 1}{2} = \frac{5}{2},$$

somit nach Quadrieren $\mathcal{E} \geq \frac{25}{2}$. $\square$