$\boxed{\text{U.56}}$ Es seien a, b, c, d positive reelle Zahlen, deren Summe 1 beträgt. Zeige, daß

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2},$$

mit Gleichheit nur für $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.
(*Irland, 1999*)

U.56 *Beweis:* Es liegt die Vermutung nahe, daß es sich hierbei um CAUCHY-SCHWARZ, also $\boldsymbol{u}^2 \cdot \boldsymbol{v}^2 \geq (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2$, mit

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \equiv \left(\frac{a}{\sqrt{a+b}}, \frac{b}{\sqrt{b+c}}, \frac{c}{\sqrt{c+d}}, \frac{d}{\sqrt{d+a}} \right)$$

handelt. Dazu paßt nur eine Wahl von $\boldsymbol{v}$, nämlich

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \equiv \left(\frac{\sqrt{a+b}}{2}, \frac{\sqrt{b+c}}{2}, \frac{\sqrt{c+d}}{2}, \frac{\sqrt{d+a}}{2} \right),$$

und zwar wegen

$$\boldsymbol{v}^2 = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{1}{2}.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die behauptete Ungleichung. Gleichheit liegt nur dann vor, wenn beide Vektoren proportional sind: $\frac{\lambda}{2} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$. Dies führt auf ein lineares homogenes Gleichungssystem für die a, b, c, d, dessen Determinante für eine nichttriviale Lösung verschwinden muß:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^4 - 1 = 0.$$

Diese charakteristische Gleichung hat die (jeweils zweifachen) Lösungen $\lambda_{1,2} = 0$ und $\lambda_{3,4} = 2$, wobei die ersten beiden herausfallen. Also bleibt $\lambda = 2$, welches auf die Gleichungen $2a = a + b$ usw., somit $a = b\,(= c = d)$ führt. Daraus folgt: Gleichheit nur für $a = b = c = d = \frac{1}{4}$. $\square$
Bemerkung: Vgl. Aufgabe U.45.