$\boxed{\textsf{U.57}}$ Es sei $x, y, z > 1$ und $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Man beweise

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

(*Iran, 1999*)

U.57 *Beweis:* Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt

$$\sqrt{x+y+z} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z}} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Mit

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} = 3 - 2 = 1$$

folgt daraus die behauptete Ungleichung. $\square$