$\boxed{\text{U.62}}$ Man beweise: Sind a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks mit

$$2\,(ab^2 + bc^2 + ca^2) = a^2b + b^2c + c^2a + 3abc,$$

dann ist das Dreieck gleichseitig.

U.62 *Beweis:* Die Standard-Substitution bei den Seitenlängen eines Dreiecken ist

$$a = y + z, \qquad b = z + x, \qquad c = x + y$$

(siehe Aufgabe D.63 oder Abschnitt G.1.1). Daher bringen wir die Nebenbedingung erst einmal in eine Form, in der die a, b, c durch $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ ersetzt sind:

$$\begin{aligned} &(x^2y - 2xy^2 + y^3) + (y^2z - 2yz^2 + z^3) + (z^2x - 2zx^2 + x^3) \\ &= y(x-y)^2 + z(y-z)^2 + x(z-x)^2 = 0. \end{aligned}$$

Wir haben somit einen Ausdruck, der ausschließlich nichtnegative Größen enthält und dabei verschwindet. Das geht jedoch nur, wenn alle Summanden einzeln verschwinden: $x = y = z$. Daraus folgt $a = b = c$, d. h., das Dreieck muß gleichseitig sein. $\square$