$\boxed{\textsf{U.63}}$ Es seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $abc = 1$. Beweise, daß

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

(*36. IMO, Kanada, Toronto, 1995*)

U.63 *Beweis:* Mit der Substitution $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ wird aus der Nebenbedingung $xyz = 1$ und aus der Behauptung

$$\frac{x^3yz}{y+z} + \frac{xy^3z}{z+x} + \frac{xyz^3}{x+y} = xyz\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right) = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Nun gibt es mehrere Wege fortzufahren, wir bemühen hier einmal TSCHEBYSCHEFF & Co. Aus $x \geq y \geq z$ folgt – da es sich um eine symmetrische Ungleichung handelt –

$$x^2 \geq y^2 \geq z^2, \qquad \frac{1}{y+z} \geq \frac{1}{z+x} \geq \frac{1}{x+y}$$

und weiter nach (U.39)

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} &\geq \frac{1}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right) \\ &\geq \frac{1}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right) \cdot \frac{9}{2\left(x+y+z\right)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}. \end{aligned}$$

Dabei wurde die AM-HM-Ungleichung benutzt. Den Rest erledigen die RMS- und die AM-GM-Ungleichung in Verbindung mit der Nebenbedingung:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z} \geq \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} = 1. \ \square$$