$\boxed{\text{U.64}}$ Beweise, daß

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

für alle positiven reellen Zahlen a, b und c gilt.
(*42. IMO, Washington D. C., USA, 2001*)

U.64 Der nachfolgende Beweis stammt von THOMAS LINHART.

Beweis: Da es sich hierbei um eine homogene Ungleichung handelt (s. Abschnitt U.3.2), können wir o. B. d. A. unsere Variablen auf $a+b+c=1$ normalisieren. Mit Hilfe der Substitution $x=a^2+8bc$, $y=b^2+8ca$, $z=c^2+8ab$ geht die behauptete Ungleichung damit über in

$$\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{b}{\sqrt{y}}+\frac{c}{\sqrt{z}}\geq 1.$$

Nun können wir die JENSENsche Ungleichung (U.42) unter Verwendung der im Intervall $(0,\infty)$ konvexen Funktion $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ benutzen:

$$\frac{a}{\sqrt{x}}+\frac{b}{\sqrt{y}}+\frac{c}{\sqrt{z}}\geq \frac{1}{\sqrt{ax+by+cz}}=\frac{1}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+24abc}}.$$

Es bleibt also,

$$1=(a+b+c)^3\geq a^3+b^3+c^3+24abc$$

zu zeigen. Dies folgt aber wegen $x+\frac{1}{x}\geq 2$ für $x>0$ der Reihe nach aus

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 6,\\
&ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+ca^2+cb^2\geq 6abc,\\
&3(ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+ca^2+cb^2)\geq 18abc,\\
&(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+ca^2+cb^2)+6abc\\
&\qquad\qquad\geq a^3+b^3+c^3+24abc. \quad \Box
\end{aligned}$$