U.84 Ist $S \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ die Summe positiver reeller Zahlen x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, dann gilt

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \le 1 + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \cdots + \frac{S^n}{n!}.$$

(APMO, 1989)

U.84 *Beweis:* Nach der AM-GM-Ungleichung ist

$$[(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)]^{\frac{1}{n}} \le \frac{(1+x_1)+(1+x_2)+\cdots+(1+x_n)}{n} = \frac{n+S}{n},$$
$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \le \left(1+\frac{S}{n}\right)^n.$$

Für die Potenz auf der rechten Seite können wir nach dem binomischen Satz schreiben:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{S}{n}\right)^n &= 1+S+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{S^2}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{S^3}{n^3} \\
&\quad+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{S^n}{n^n} \\
&= 1+S+1\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{S^2}{2!}+1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{S^3}{3!} \\
&\quad+\cdots+1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{S^n}{n!} \\
&\le 1+S+\frac{S^2}{2!}+\frac{S^3}{3!}+\cdots+\frac{S^n}{n!}
\end{aligned}$$

mit Gleichheit nur für $n=1$. $\square$