$\boxed{\mathsf{U.85}}$ $a \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $b \equiv (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ seien Folgen positiver reeller Zahlen. Dann gilt

$$\min_{1 \le k \le n} \frac{a_k}{b_k} \le \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \le \max_{1 \le k \le n} \frac{a_k}{b_k}$$

mit Gleichheit in beiden Ungleichungen genau dann, wenn beide Folgen a und b zueinander proportional sind.

U.85 *Beweis:* Setzen wir $m \equiv \min_k (a_k/b_k)$ und $M \equiv \max_k (a_k/b_k)$, so ist

$$m \leq \frac{a_k}{b_k} \leq M \quad \Longrightarrow \quad m b_k \leq a_k \leq M b_k$$

$$\Longrightarrow \quad m \sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq M \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \Longrightarrow \quad m \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k} \leq M. \ \square$$

Anwendung: Für $x \geq 0$ gilt mit a) $a_k = kx^{k-1}$, $b_k = (n-k+1)x^{k-1}$:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}}{n + (n-1)x + \cdots + x^{n-1}} \leq n,$$

sowie mit b) $a_k = kx^{k-1}$, $b_k = k^2 x^{k-1}$:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}}{1 + 2^2 x + \cdots + n^2 x^{n-1}} \leq 1.$$