$\boxed{\textsf{U.91}}$ Die nichtnegativen reellen Zahlen a, b, c, d, e, f erfüllen die Bedingungen $a + b \leq e$ und $c + d \leq f$. Dann gilt

$$\sqrt{ac} + \sqrt{bd} \leq \sqrt{ef} \qquad \text{bzw.} \qquad \sqrt{ad} + \sqrt{bc} \leq \sqrt{ef}.$$

U.91 *Beweis:* Multiplikation der beiden Voraussetzungen ergibt

$$ac + bd + ad + bc \leq ef.$$

Damit und wegen AM-GM: $2\sqrt{ac}\sqrt{bd} = 2\sqrt{ad}\sqrt{bc} \leq ad + bc$ ist

$$\left(\sqrt{ac} + \sqrt{bd}\right)^2 = ac + bd + 2\sqrt{ac}\sqrt{bd} \leq ac + bd + ad + bc \leq ef.$$

Da c und d vertauschbar sind, folgt auch die andere Ungleichung. $\square$