U.3 Einfache Tips und Tricks

Nachdem im vorigen Abschnitt die grundlegenden Werkzeuge bereitgelegt wurden, mit denen wir die kommenden Aufgaben angehen können, betrachten wir einleitend einige einfache Ungleichungen. Als ersten allgemeingültigen Tip halten wir fest, daß es stets ein guter Lösungsansatz ist, die Behauptung auf einen Ausdruck zurückzuführen, der offensichtlich größer oder gleich null ist. Besonders eignen sich hierzu Quadrate oder Summen bzw. Produkte von solchen Ausdrücken. Gelingt es z. B., wie in der Ungleichung

$$(1 + a + a^2)^2 < 3(1 + a^2 + a^4) \qquad \forall \; a \neq 1,$$

welche nach kurzer äquivalenter Umformung in $a^4 - a^3 - a + 1 > 0$ übergeht, diesen Ausdruck zu *faktorisieren* (was häufig Intuition erfordert):

$$a^4 - a^3 - a + 1 = (a - 1)(a^3 - 1) > 0,$$

ist das Wichtigste schon geschafft. Sowohl für $a < 1$ als auch für $a > 1$ sind beide Faktoren offenbar positiv, und die Ungleichung ist bewiesen. Nebenbei bemerkt: Daß eins eine Nullstelle dieses Polynoms ist und somit der Faktor $a - 1$ auftreten könnte, ist manchmal schon der Aufgabenstellung zu entnehmen (hier die Einschränkung $a \neq 1$).