U.3.1 „Teile und (be)herrsche“

Bei Ungleichungen, die mehrere Terme enthalten und deren Seiten bei einer zyklischen Vertauschung der Variablen unverändert bleiben (s. auch Abschnitt U.3.2), bietet es sich an, zunächst nur Teile der Ungleichung zu betrachten. Oft gelingt es, auf beiden Seiten Terme zu gruppieren, in denen einige Variablen fehlen. Liegt uns z. B.

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \qquad a, b, c \in \mathbb{R},$$

zum Beweis vor, finden wir auf der linken Seite $a^2 + b^2$ und auf der rechten ab, zwischen denen diejenige Ungleichung besteht, auf die wohl am häufigsten zurückgegriffen wird: die *Mutter aller Ungleichungen* $(a - b)^2 \geq 0$, oder daraus abgeleitet:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \tag{U.43}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \qquad a, b \in \mathbb{R}^+, \tag{U.44}$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \qquad x \in \mathbb{R}^+. \tag{U.45}$$

Ebenso erkennen wir $b^2 + c^2 \geq 2bc$ und $c^2 + a^2 \geq 2ca$. Eine Addition dieser drei einfacheren Ungleichungen und anschließende Division durch 2 liefert das gewünschte Ergebnis.