U.3.6 Ungleichungen unter Nebenbedingungen

Häufig sind Ausdrücke nach oben bzw. unten *abzuschätzen*, d. h., es ist das Maximum bzw. Minimum des Ausdrucks in einem bestimmten Definitionsbereich oder unter zusätzlichen einschränkenden Bedingungen gesucht. Angenommen, wir sollen zeigen, daß für nichtnegative Zahlen a und b mit der Nebenbedingung $a^2 + b^2 = 4$ der Ausdruck

$$\frac{ab}{a+b+2}$$

niemals größer als $\sqrt{2}-1$ wird (*Österreich, 1989*). Die Lösungsidee besteht nun darin, den in der Nebenbedingung enthaltenen Ausdruck (hier also $a^2 + b^2$) so in dem Zielausdruck oder der zu beweisenden Ungleichung unterzubringen, daß letzteres sich vereinfacht. Die Nebenbedingung ist damit „verkocht" und wir können uns voll auf den neuen Term bzw. die neue Ungleichung konzentrieren. In unserem obigen Beispiel lassen die Terme $a^2 + b^2$, ab und $a + b$ vermuten, daß wir es zunächst mit

$$\begin{aligned}&(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4 + 2ab, \qquad \text{oder}\\ &2ab = (a+b)^2 - 2^2 = (a+b+2)(a+b-2)\end{aligned}$$

versuchen können, was uns obigen Ausdruck tatsächlich auf

$$\frac{ab}{a+b+2} = \frac{a+b-2}{2} = \frac{a+b}{2} - 1$$

vereinfacht. Somit reduziert sich die Aufgabe auf den Nachweis von $a + b \leq 2\sqrt{2}$. Nun kommt der entscheidende Schritt:

$$(a+b)^2 = (a^2+b^2) + 2ab \left\{ \begin{array}{ll} \leq & 2(a^2+b^2) = 8, \\ \geq & 4ab, \end{array} \right.$$

beides wegen $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Die obere Möglichkeit liefert eine Abschätzung nach *oben* (Maximum), die andere nach *unten* (Minimum). Wir sind hier an einem Maximalwert von $a + b$ interessiert und finden nach Wurzelziehen und Einsetzen der Nebenbedingung die Ungleichung $a + b \leq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ bestätigt.