U.3.7 Substitutionen und Transformationen

Mitunter sollten wir auch an die Möglichkeit denken, mißliebige Ausdrücke mit einer geschickten Substitution „wegzutransformieren". Häufig stören Wurzelausdrücke, vor allem, wenn sie als Summe von drei Summanden, wie zum Beispiel auf der linken Seite von

$$\frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{\frac{27}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+b+c}}, \qquad (a,b,c \in \mathbb{R}^+)$$

auftreten. Hier bietet es sich an, beispielsweise mit

$$x = \frac{1}{b+c}, \qquad y = \frac{1}{c+a}, \qquad z = \frac{1}{a+b}$$

einen neuen Satz von Variablen einzuführen. Die linke Seite geht damit in die Summe $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ über, während für die rechte Seite die Transformation $(a,b,c) \to (x,y,z)$ umzukehren ist, um den entsprechenden Ausdruck zu finden. Mit

$$a = \frac{-yz+zx+xy}{2xyz}, \qquad b = \frac{-zx+xy+yz}{2xyz}, \qquad c = \frac{-xy+yz+zx}{2xyz}$$

erhalten wir die transformierte Ungleichung

$$\begin{aligned} & \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq \sqrt{\frac{27xyz}{yz+zx+xy}}, \\ \Longrightarrow \qquad & (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \cdot (yz+zx+xy) \geq 27xyz. \end{aligned}$$

Dieses Zwischenergebnis bestätigen wir nun einfach durch Multiplikation der drei AM-GM-Ungleichungen $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq 3(xyz)^{\frac{1}{6}}$ (zweimal) und $yz + zx + xy \geq 3(xyz)^{\frac{2}{3}}$ (einmal). □ — Aufpassen: Die verwendete Substitution muß eineindeutig sein![†]

Etwas subtiler wird es, wenn z. B. solche exotischen Nebenbedingungen wie $a+b+c = abc$ zu beachten sind. Setzen wir hier

$$a = \tan\alpha, \qquad b = \tan\beta, \qquad c = \tan\gamma, \tag{U.49}$$

so wandelt sich nach der bekannten Relation

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma,$$

die für die drei Winkel α, β und γ eines Dreiecks gilt (s. Abschnitt T.1), die ungewöhnliche Nebenbedingung $a + b + c = abc$ um in das schlichte $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Es bleibt an dieser Stelle auf den Abschnitt T.6 hinzuweisen, in dem weitere Substitutionen zusammengestellt sind.

[†] Was man einfach mittels Verschwinden der Wronski-Determinante $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = 0$ überprüft.