U.4 Elementare symmetrische Funktionen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den denkbar einfachsten symmetrischen Termen. Sind $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ die Nullstellen des Polynoms

$$\begin{aligned} P(x) &\equiv (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\ &= x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1} x + (-1)^n \sigma_n = 0, \end{aligned} \tag{U.50}$$

so werden dessen Koeffizienten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ die *elementaren symmetrischen Funktionen* der Variablen x_i genannt. Formal können wir dafür auch

$$\sigma_k = \sum_{\text{sym}} \left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{\pi_j} \right), \qquad 1 \leq k \leq n \tag{U.51}$$

schreiben, wobei $\pi \equiv (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ eine Permutation von $\pi_j = \{0, 1\}$ mit $\pi_1 + \cdots + \pi_n = k$ darstellt, und die Summation $\sum\limits_{\text{sym}}$ bedeutet, daß über alle Permutationen zu summieren ist (insgesamt also $\binom{n}{k}$ Summanden). Vereinfacht gesagt, ist σ_k somit die Summe aller möglichen Produkte der Zahlen x_i, wobei immer k Faktoren genommen werden.

Für $n = 2$, $x_1 = a$, $x_2 = b$ ergibt sich insbesondere

$$\sigma_1 \equiv a + b, \qquad \sigma_2 \equiv ab, \tag{U.52}$$

für $n = 3$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$

$$\sigma_1 \equiv a + b + c, \qquad \sigma_2 \equiv bc + ca + ab, \qquad \sigma_3 \equiv abc, \tag{U.53}$$

und für $n = 4$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, $x_4 = d$

$$\begin{aligned} &\sigma_1 \equiv a + b + c + d, && \sigma_2 \equiv ab + ac + ad + bc + bd + cd, \\ &\sigma_3 \equiv bcd + cda + dab + abc, && \sigma_4 \equiv abcd. \end{aligned} \tag{U.54}$$

Weiterhin sei angenommen, daß $\sigma_0 = 1$ und $\sigma_k = 0$ für $k > n$ gilt.

Der wohl wichtigste Satz im Zusammenhang mit den elementaren symmetrischen Funktionen ist der sog.