U.5 Polynomiale Ungleichungen

Neben den einfachsten aller Ungleichungen (den linearen, quadratischen und solchen, in denen Betragszeichen vorkommen) gibt es eine weitere Klasse, in denen Polynome von zwei und mehr Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten auftreten. Wir nennen sie kurz *polynomiale Ungleichungen*. Bevor wir jedoch dazu kommen, ist es angebracht, einige besondere Schreibweisen zu verabreden.

Symmetrische Summation. Mit dem Zusatz „sym" unter dem Summenzeichen

$$\sum_{\text{sym}} F(x_1, \ldots, x_n)$$

wird die Summe über alle $n!$ Terme bezeichnet, die entstehen, wenn die n Variablen in $F(x_1, \ldots, x_n)$ alle möglichen Permutationen durchlaufen. Im speziellen Fall, daß die Funktion F ein Potenzprodukt (auch *primitives Monom* genannt)

$$F(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}, \qquad (x_i > 0, \;\; \nu_i \geq 0)$$

ist, werde folgende Schreibweise zur Abkürzung verwendet:

$$\mathcal{S}\{\nu_1, \ldots, \nu_n\} = \frac{1}{n!} \sum_{\text{sym}} x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}. \tag{U.105}$$

$\mathcal{S}\{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$ ist somit stets ein *symmetrisches Mittel*, das unverändert bleibt, wenn die ν_i permutiert werden. Zwei Summen $\mathcal{S}\{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$ und $\mathcal{S}\{\nu_1', \ldots, \nu_n'\}$ sind gleich, falls sie sich nur in der Anordnung der ν_i unterscheiden. Insbesondere sind

$$\mathcal{S}\{1, 0, \ldots, 0\} = \frac{(n-1)!}{n!}(x_1 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \quad \text{und} \tag{U.106}$$

$$\mathcal{S}\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right\} = \frac{n!}{n!} x_1^{\frac{1}{n}} \cdots x_n^{\frac{1}{n}} = (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \tag{U.107}$$

das arithmetische bzw. geometrische Mittel der x_i. Weiterhin ist $\mathcal{S}\{0, 0, \ldots, 0\} = 1$.

Um nun Polynome *vergleichen* und damit *ordnen* zu können, benötigen wir noch den Begriff

Majorisation. Wir sagen, daß die Folge (ν') durch (ν) *majorisiert* wird und schreiben dafür

$$(\nu) \succ (\nu'),$$

wenn die ν_i und ν_i' so angeordnet werden können, daß folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

$$\nu_1 + \cdots + \nu_n = \nu_1' + \cdots + \nu_n', \tag{U.108}$$

$$\nu_1 \geq \cdots \geq \nu_n, \qquad \nu_1' \geq \cdots \geq \nu_n', \tag{U.109}$$

$$\nu_1 + \cdots + \nu_i \geq \nu_1' + \cdots + \nu_i', \qquad (1 \leq i < n). \tag{U.110}$$

Die zweite Bedingung (U.109), die eine *lexikographische Ordnung* der beiden Folgen darstellt, ist dabei keine Einschränkung an sich, da wir ja die ν_i beliebig vertauschen können, sie ist aber wesentlich für die dritte Bedingung (U.110).

Angenommen, wir verzichten zunächst auf die lexikographische Ordnung und betrachten eine Folge (ν), in der nicht alle ν_i untereinander gleich sind. Dann können wir jedes Paar unterschiedlicher ν_i, ν_j an die ersten beiden Stellen schieben, ohne daß sich etwas an dem symmetrischen Mittel ändert und schreiben dafür $\mathcal{S}\{\rho+\tau, \rho-\tau, \nu_3, \ldots, \nu_n\}$ mit $0 < \tau \leq \rho$. Dann gilt folgendes