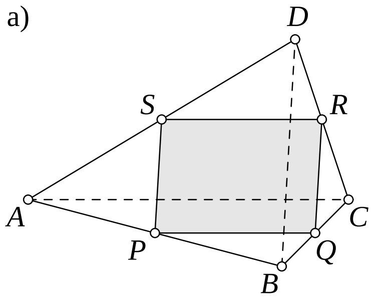
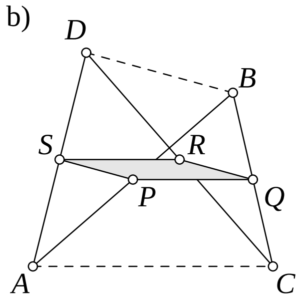
V.1 **Varignon-Parallelogramm.** Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen ebenen Vierecks, so entsteht ein Parallelogramm, dessen Flächeninhalt halb so groß wie der des Vierecks ist.

V.1 *Beweis:* Erinnern wir uns daran, daß in einem Dreieck die Strecke, die die Mittelpunkte zweier Seiten verbindet, nach der Umkehrung des zweiten Strahlensatzes parallel und halb so lang wie die dritte Seite ist (s. Aufgabe D.10). In unserem Viereck $ABCD$ seien die Mittelpunkte der Seiten nun mit P, Q, R und S bezeichnet (Bild a). Betrachten wir die Dreiecke ABC und





ADC, so können wir schließen, daß beide Strecken PQ und RS parallel zur Diagonalen AC verlaufen und $PQ = RS = \frac{1}{2}AC$ gilt. Damit ist $PQRS$ das sog. VARIGNON-Parallelogramm. Dies ist auch der Fall, wenn wir ein überschlagenes Viereck zugrunde legen (Bild b). Für den Flächeninhalt des VARIGNON-Parallelogramms finden wir:

$$\begin{aligned}
[PQRS] &= [ABCD] - [SAP] - [PBQ] - [QCR] - [RDS] \\
&= [ABCD] - \frac{1}{4}[ABD] - \frac{1}{4}[ABC] - \frac{1}{4}[BCD] - \frac{1}{4}[DAC] \\
&= [ABCD] - \frac{1}{4}[ABCD] - \frac{1}{4}[ABCD] \\
&= \frac{1}{2}[ABCD]. \quad \square
\end{aligned}$$

Bemerkung: $PQRS$ bleibt auch dann ein (ebenes) Parallelogramm, wenn A, B, C und D vier beliebige Punkte im Raum sind, die nicht in einer Ebene liegen (vgl. Aufgabe M.7).