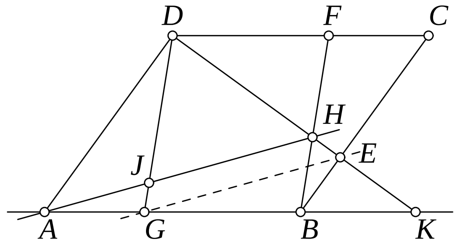
V.12 In einem Parallelogramm $ABCD$ bezeichnen E, F Punkte auf BC bzw. CD. Die Parallele durch D zu FB schneide AB im Punkt G. Der Schnittpunkt von DE mit BF sei H. Man zeige, daß AH und GE parallel sind.
(*Elem. Math. 31 (1976), Aufgabe 738*)

V.12 *Beweis:* (Bild) Es sei $K \equiv DE \cap AB$ sowie $J \equiv DG \cap AH$. Die Strahlensätze liefern die Proportionen:



$$\text{für } \measuredangle HAK: \quad \frac{AG}{AB} = \frac{GJ}{BH},$$

$$\text{für } \measuredangle GKD: \quad \frac{KB}{KG} = \frac{KH}{KD} = \frac{BH}{GD},$$

$$\text{für } \measuredangle AKD: \quad \frac{KB}{KA} = \frac{KE}{KD}.$$

Außerdem gilt: $AG = KA - KG$ und $AB = KA - KB$. Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{DJ}{DG} &= \frac{DG - GJ}{DG} = 1 - \frac{GJ}{DG} = 1 - \frac{AG}{AB} \cdot \frac{HB}{DG} = 1 - \frac{AG}{AB} \cdot \frac{KB}{KG} \\ &= \frac{(KA - KB) \cdot KG - (KA - KG) \cdot KB}{AB \cdot KG} = \frac{KA \cdot (KG - KB)}{AB \cdot KG} \\ &= \frac{1 - KB/KG}{1 - KB/KA} = \frac{1 - KH/KD}{1 - KE/KD} = \frac{KD - KH}{KD - KE} = \frac{DH}{DE};\end{aligned}$$

damit ist nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes $AH \parallel GE$. $\square$