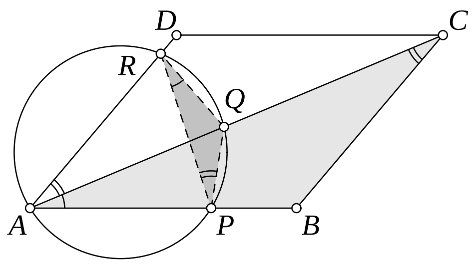
$\boxed{\text{V.14}}$ Ein Kreis schneide die Seiten AB und AD sowie die Diagonale AC eines Parallelogramms $ABCD$ in den Punkten P, R bzw. Q. Zeige, daß folgende Gleichung gilt:

$$AP \cdot AB + AR \cdot AD = AQ \cdot AC.$$

(*Baltic Way, Hamburg, 2001*)

V.14 *Beweis:* (Bild) Die vorgelegte Gleichung sieht ja von ihrer Struktur ($ac+bd = ef$) ganz nach Ptolemäus aus; unschön nur, daß nicht alle Längen Seiten- bzw. Diagonalenlängen sind. Einen Kreis haben wir auch und in diesen „passen“ AP, AR und AQ hervorragend hinein. Also müssen die „störenden“ Längen AB, AD und AC ersetzt werden und da hilft nur: $\triangle ABC \sim \triangle RQP$. Dies nachzuweisen, ist nicht schwer:



$$\measuredangle BAC = \measuredangle PAQ = \measuredangle PRQ \quad \text{(Peripheriewinkel über } PQ\text{)},$$

$$\measuredangle BCA = \measuredangle QAR = \measuredangle QPR \quad \text{(Wechselwinkel und Peripheriewinkel über } QR\text{)}.$$

Aus der Ähnlichkeit dieser beiden Dreiecke folgt nun

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PQ} = \frac{AC}{PR},$$

andererseits liefert der Satz des Ptolemäus im Sehnenviereck $APQR$

$$AP \cdot QR + AR \cdot PQ = AQ \cdot PR.$$

Beide Gleichungen miteinander multipliziert, ergibt mit $BC = AD$ die Behauptung. □