$\boxed{\text{V.31}}$ In jedem Tangentenviereck $ABCD$ gilt:

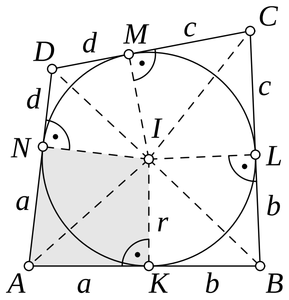
a) $AB + CD = BC + DA,$ (V.3)

b) $[ABI] + [CDI] = [BCI] + [DAI],$ (V.4)

c) $[ABCD] = rs,$ (V.5)

wobei I und r den Mittelpunkt bzw. Radius des einbeschriebenen Kreises sowie s den halben Umfang von $ABCD$ bezeichnen.

V.31 *Beweis:* (Bild) a) Wir bezeichnen die Berührungspunkte der Seiten des Tangentenvierecks $ABCD$ mit dem Inkreis mit K, L, M, N. Im Dreieck AIK steht der Berührungsradius IK stets senkrecht auf dem Tangentenabschnitt AK; es ist somit rechtwinklig. Das gleiche gilt für $\triangle AIN$. Beide Dreiecke sind darüber hinaus kongruent nach Kongruenzsatz SSW, da sie die Seite AI gemeinsam haben, die Seiten $IK = IN$ gleich lang sind und in den Winkeln $\measuredangle IKA = \measuredangle INA = 90°$ übereinstimmen. Somit sind insbesondere ihre Seiten $AK = AN \equiv a$ gleich lang. Analog zeigen wir $BK = BL \equiv b$, $CL = CM \equiv c$, $DM = DN \equiv d$. Die Summe der Längen gegenüberliegender Seiten ist daher $AB + CD = a + b + c + d = BC + DA$. □



b) Da alle vier Dreiecke ABI, BCI, CDI, DAI dieselbe Höhe haben, nämlich den Inkreisradius r, ist (V.4) eine direkte Folge des soeben unter a) bewiesenen Satzes: $[ABI] + [CDI] = \frac{r}{2}(a + b + c + d) = [BCI] + [DAI]$. □

c) $[ABCD] = [ABI] + [BCI] + [CDI] + [DAI] = r\,(a + b + c + d) = rs$. □