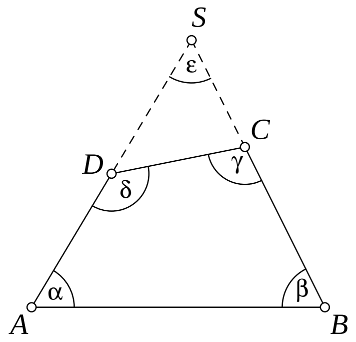
V.4 Wie groß ist der Winkel, der von den verlängerten gegenüberliegenden Seiten eines konvexen Vierecks eingeschlossen wird?

V.4 (Bild) Die Eckpunkte des Vierecks seien wie üblich mit A, B, C, D bezeichnet; die Innenwinkel bei den Eckpunkten in dieser Reihenfolge mit α, β, γ, δ. Betrachten wir nun beispielsweise die gegenüberliegenden Seiten BC und AD, so schneiden sich ihre Verlängerungen in einem Punkt S, vorausgesetzt, sie verlaufen nicht parallel zueinander. Für den gesuchten Winkel $\measuredangle ASB \equiv \varepsilon$ erhalten wir dann aus den Sätzen über die Innenwinkelsumme im $\triangle ABS$ (gleich 180°) sowie der im Viereck $ABCD$ (gleich 360°):



$$\begin{aligned}\varepsilon &= |180^\circ - (\alpha+\beta)| = |180^\circ - [360^\circ - (\gamma+\delta)]| \\ &= |\gamma+\delta-180^\circ| = |180^\circ - \gamma - \delta|.\end{aligned}$$

Die Betragsstriche sorgen dafür, daß ε auch im Fall $\alpha+\beta > 180^\circ$ positiv wird (S würde dann im Bild unterhalb von AB liegen). Im Fall, daß die gegenüberliegenden Seiten gerade die zueinander parallelen Seiten AB, CD eines Trapezes sind, liefert obige Beziehung

$$\measuredangle(AB,CD) \equiv \eta = |180^\circ - (\beta+\gamma)| = 0,$$

in Übereinstimmung damit, daß sich parallele Geraden im Unendlichen schneiden.