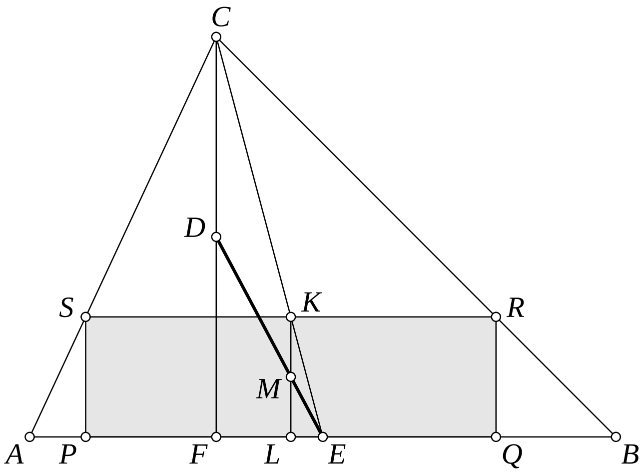
$\boxed{\text{W.1}}$ In ein spitzwinkliges Dreieck ABC werden Rechtecke $PQRS$ einbeschrieben, so daß P und Q auf der Seite AB liegen, R auf der Seite BC liegt und S auf der Seite AC liegt. Bestimmen Sie die Menge aller Punkte M, die Umkreismittelpunkte eines solchen Rechtecks sind.

(*41. Mathematik-Olympiade 2001/02, Klasse 9/10, Stufe 1*)

W.1 (Bild) Der Umkreismittelpunkt M eines Rechtecks $PQRS$ ist bekanntlich stets der Schnittpunkt der Diagonalen PR und QS oder auch der Mittelpunkt der Strecke KL, wobei K und L die Mittelpunkte der Seiten RS bzw. PQ sind. Es sei D der Mittelpunkt der Höhe CF sowie E der Mittelpunkt der Seite AB des Dreiecks ABC. Wir zeigen nun:



1. Wenn M ein innerer Punkt von DE ist, dann ist er Umkreismittelpunkt eines derartigen Rechtecks $PQRS$.
Beweis: Da CE Seitenhalbierende im Dreieck ABC ist, halbiert $K \equiv CE \cap SR$ nach dem zweiten Strahlensatz (wegen $SR \parallel AB$) die Rechteckseite SR. Andererseits ist ED Seitenhalbierende im Dreieck CEF und damit (mit demselben Argument wie eben) $M \equiv ED \cap KL$ der Mittelpunkt von KL. $\square$
Das heißt aber noch nicht, daß es keine anderen Punkte M gibt, die derartige Umkreismittelpunkte sind. Deshalb zeigen wir noch die *Umkehrung*:
2. Wenn M der Umkreismittelpunkt eines derartigen Rechtecks $PQRS$ ist, dann muß M ein innerer Punkt von DE sein.
Beweis: Nach Voraussetzung ist nun M Mittelpunkt von KL, wobei KL Mittellinie im Rechteck $PQRS$ ist. Da E Mittelpunkt von AB ist, schneidet CE nach dem zweiten Strahlensatz auch SR in ihrem Mittelpunkt K', also $K' = K \in CE$. Ferner ist D Mittelpunkt der Höhe CF, also schneidet ED auch KL in ihrem Mittelpunkt M', somit $M' = M \in ED$. $\square$
Bemerkung: Die Beschränkung auf innere Punkte von DE ist notwendig, da für $M = D$ und $M = E$ die Rechtecke zu Strecken entarten.