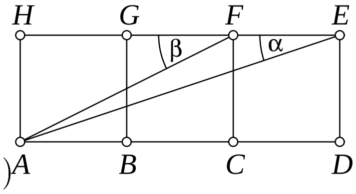
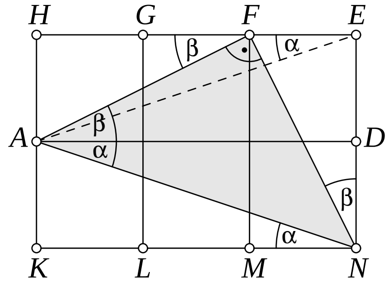
W.15 (Bild) Gegeben sei ein aus drei kongruenten Quadraten zusammengesetztes Rechteck. Man zeige ohne Benutzung trigonometrischer Formeln, daß die Summe der Winkel α und β gleich $45°$ ist.



(*3. Mathematik-Olympiade 1963/64, Klasse 10, Stufe 4*)

W.15 *Beweis:* (Bild) Spiegeln wir die drei Quadrate an der unteren Kante, so erkennen wir, daß die rechtwinkligen Dreiecke AHF und EFN kongruent sind (z. B. SSS). Daher ist $\triangle AFN$ gleichschenklig mit den Basiswinkeln



$$\measuredangle FNA = \measuredangle FAN = \measuredangle FAD + \measuredangle DAN.$$

$\beta = \measuredangle HFA = \measuredangle FAD$ und $\alpha = \measuredangle DAN = \measuredangle ANK$ sind jeweils Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, so daß aus obiger Gleichung

$$\measuredangle FNA = 90^\circ - \alpha - \beta = \measuredangle FAN = \alpha + \beta$$

folgt. Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung $\alpha + \beta = 45^\circ$. $\square$