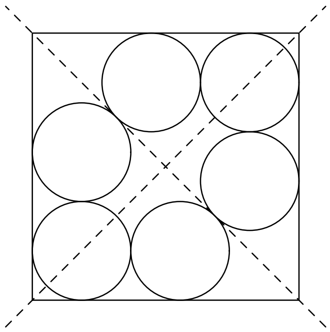
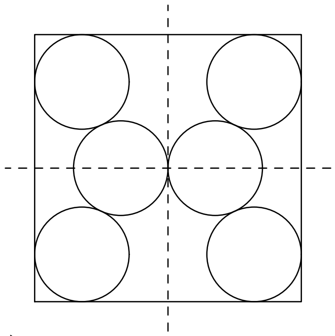
W.17 (Bild) In ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a sollen n kongruente, möglichst große Kreise so einbeschrieben werden, daß keine zwei Kreise einen inneren Punkt gemeinsam haben und daß kein Punkt eines Kreises außerhalb des Quadrates liegt. Das Bild zeigt ein Beispiel für $n = 6$. Sind die Kreise in Teilbild a) oder b) größer? (*35. Mathematik-Olympiade 1995/96, Klasse 9/10, Stufe 4*)

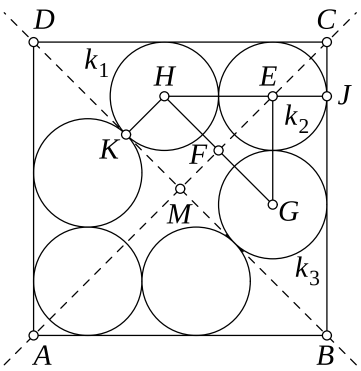


a)

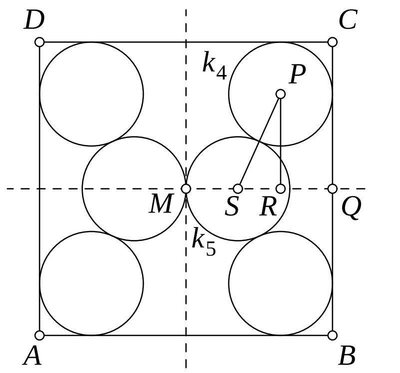


b)

W.17 (Bild) a) Die Punkte H, E, G seien die Mittelpunkte der drei Kreise k_1, k_2, k_3 mit dem Radius r_1 sowie M der Mittelpunkt des Quadrats $ABCD$. Der Schnittpunkt von GH mit CM sei F. Aus den Berührungen von Kreisen miteinander, mit Seiten des Quadrats sowie



a)



b)

mit der Diagonale BD ergibt sich: Das Dreieck EJC ist gleichschenklig-rechtwinklig mit der Kathetenlänge r_1, ebenso die Dreiecke EFG und EFH mit der Hypotenusenlänge $2r_1$, ferner gilt $FM = r_1$. Damit folgt

$$\frac{a}{2}\sqrt{2} = CM = CE + EF + FM = r_1\sqrt{2} + r_1\sqrt{2} + r_1,$$
$$r_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2(2\sqrt{2}+1)} = \frac{a}{4+\sqrt{2}} = \frac{a}{14}(4-\sqrt{2}).$$

b) Hier sind P und S die Mittelpunkte der Kreise k_4 bzw. k_5 mit dem Radius r_2. Der Mittelpunkt von BC sei Q, das Lot von P auf MQ habe den Fußpunkt R. Wie unter a) folgt $MS = RQ = r_2$, $PS = 2r_2$ und $PR = \frac{1}{2}a - r_2$. Der Satz des Pythagoras, angewandt auf das $\triangle SRP$, ergibt

$$\left(\frac{a}{2} - 2r_2\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - r_2\right)^2 = 4r_2^2, \qquad r_2^2 - 3ar_2 + \frac{a^2}{2} = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen

$$r_{2_{1,2}} = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{9}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2} = \frac{a}{2}(3 \pm \sqrt{7}),$$

von denen wegen $\frac{1}{2}a(3+\sqrt{7}) > \frac{1}{2}a(3+\sqrt{4}) = \frac{5}{2}a > a$ aber nur $r_2 = \frac{a}{2}(3-\sqrt{7})$ in Betracht kommt. Nun beweisen wir $r_1 > r_2$, also

$$\frac{a}{14}(4-\sqrt{2}) > \frac{a}{2}(3-\sqrt{7}).$$

Dies folgt der Reihe nach aus

$$\begin{aligned} 4-\sqrt{2} &> 7(3-\sqrt{7}), \\ 7\sqrt{7} &> 17+\sqrt{2}, \\ 343 &> 289 + 34\sqrt{2} + 2, \\ 26 &> 17\sqrt{2}, \\ 676 &> 578. \end{aligned}$$

In Bild a) sind also die größeren Kreise gezeichnet.

Bemerkung: Man beachte die Ungleichungskette am Ende der Lösung, deren Text im wesentlichen original übernommen wurde. Es genügt zur vollständigen und richtigen Lösung dieser Olympiade-Aufgabe *nicht*, die erste Ungleichung etwa unter Verwendung von Näherungswerten (z. B. mit dem Taschenrechner erhaltenen) nachzuweisen. Mit anderen Worten: Der Taschenrechner ist für Olympiade-Aufgaben selten geeignet (und auch nicht zugelassen).