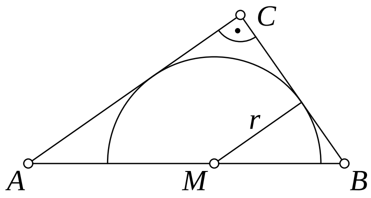
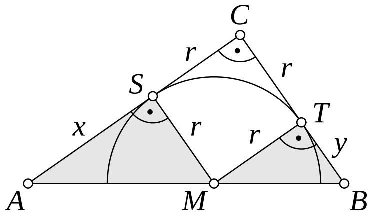
W.19 (Bild) Gegeben sei ein Halbkreis mit dem Radius r. Diesem Halbkreis seien rechtwinklige Dreiecke ABC wie im Bild gezeigt umbeschrieben. Unter allen derartigen Dreiecken ermittle man dasjenige mit dem kleinsten Flächeninhalt.



(*41. Mathematik-Olympiade 2001/02, Klasse 11–13, Stufe 2*)

W.19 *Beweis:* (Bild) S und T seien die Berührungspunkte des Halbkreises mit den Seiten AC bzw. BC des Dreiecks, weiterhin sei $x \equiv AS$ und $y \equiv BT$. Dann ist $CSMT$ offensichtlich ein Quadrat, und für den Flächeninhalt von $\triangle ABC$ gilt:



$$A = \frac{1}{2}(r+x)(r+y) = \frac{1}{2}[r^2 + r(x+y) + xy].$$

Da der *kleinste* Flächeninhalt gesucht ist, müssen wir den obigen Ausdruck in eckigen Klammern nach *unten* abschätzen, d. h., das Relationszeichen muß „$\geq$“ lauten. Hierzu eignet sich die AM-GM-Ungleichung (s. Abschnitt U.2), hier angewandt auf den Term $(x+y)$:

$$A = \frac{1}{2}[r^2 + r(x+y) + xy] \geq \frac{1}{2}[r^2 + 2r\sqrt{xy} + xy] = \frac{1}{2}(r + \sqrt{xy})^2 .$$

Es verbleibt nun, xy durch den Radius r auszudrücken. Dies ist mit Hilfe der beiden ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke $\triangle ASM \sim \triangle MTB$ (jeweils gleiche Innenwinkel, da parallele Seiten) schnell erledigt, denn es sind z. B. die Verhältnisse der Katheten untereinander gleich:

$$\frac{x}{r} = \frac{r}{y} \qquad \Longrightarrow \qquad xy = r^2 \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{1}{2}(r+r)^2 = 2r^2.$$

Sowohl aus diesem Ergebnis als auch aus der Gleichheitsbedingung der AM-GM-Ungleichung ($x = y$) sehen wir, daß ein *gleichschenkliges* Dreieck dasjenige ist, welches von allen umbeschriebenen rechtwinkligen Dreiecken den kleinsten Flächeninhalt hat.