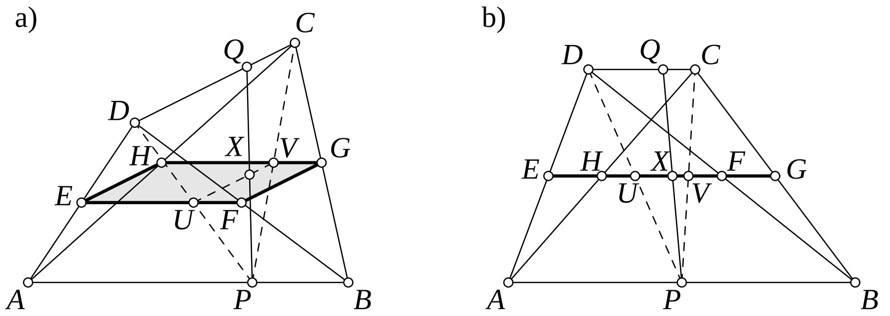
W.20 Es sei $ABCD$ ein beliebig gegebenes konvexes Viereck. Ein Punkt P durchlaufe alle Punkte der Seite AB, ein Punkt Q durchlaufe unabhängig hiervon alle Punkte der Seite CD. Man ermittle die Menge der Mittelpunkte aller so entstehenden Strecken PQ.
(*35. Mathematik-Olympiade 1996/97, Klasse 11–13, Stufe 3*)

W.20 Wir betrachten zunächst die vier Mittelpunkte E, F, G, H der Strecke PQ bei den speziellen Lagen $PQ \equiv \{AD, BD, BC, AC\}$. Sind nun AB und DC *nicht* parallel zueinander (Bild a), so ist $EFGH$ gerade das VARIGNON-Parallelogramm des überschlagenen Vierecks $ADBC$; im Fall $AB \parallel DC$ dagegen liegen F und H auf der Strecke EG (Bild b); das Parallelogramm $EFGH$ ist zu dieser Strecke entartet. Nun wird gezeigt: Die Menge der Mittelpunkte aller Strecken PQ ist im Fall a) ($AB \nparallel DC$) die Parallelogrammfläche $\boldsymbol{M} \equiv EFGH$ bzw. im Fall b) ($AB \parallel DC$) die Strecke $\boldsymbol{M} \equiv EG$. Angenommen, X sei der Mittelpunkt einer Strecke PQ. Dann gilt für den



Schnittpunkt U von PD mit EF und den Schnittpunkt V von PC mit HG nach dem ersten Strahlensatz $PU : PD = PV : PC = 1 : 2$ und nach dessen Umkehrung $UV \parallel DC$. Also schneidet UV die Strecke PQ in deren Mittelpunkt, d. h. in X. Daher liegt X auf UV und somit in $\boldsymbol{M}$. $\square$