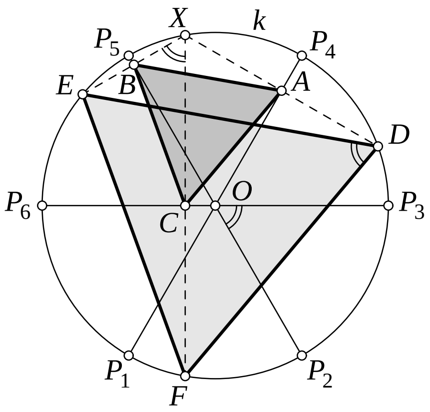
W.21 Es sei k der Umkreis eines gegebenen regelmäßigen Sechsecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$. Ist X ein Punkt auf k, so seien A, B und C die Fußpunkte der Lote von X auf die Diagonalen P_1P_4, P_2P_5 bzw. P_3P_6. Man beweise, daß der Flächeninhalt des Dreiecks ABC nicht von der Wahl des Punktes X auf k abhängt.
(*35. Mathematik-Olympiade 1996/97, Klasse 11–13, Stufe 3*)

W.21 *Beweis:* (Bild) Die Verlängerungen von XA, XB und XC schneiden k mit dessen Mittelpunkt O zum zweiten Mal in D, E bzw. F. Die Sehnen XD, XE, XF werden dabei durch die senkrecht auf ihnen stehenden Durchmesser P_1P_4, P_2P_5, P_3P_6 gerade in den Punkten A, B, C halbiert. Es gilt demnach

$$\frac{XA}{XD} = \frac{XB}{XE} = \frac{XC}{XF} = \frac{1}{2},$$



und $\triangle ABC$ geht somit aus $\triangle DEF$ durch Streckung um den Faktor $\frac{1}{2}$ hervor. Weiterhin stehen beide Schenkel XB, XC des Winkels $\measuredangle BXC$ senkrecht auf den Schenkeln OP_2, OP_3 des Winkels $\measuredangle P_2OP_3 = 60°$, woraus mit dem Peripheriewinkelsatz

$$\measuredangle P_2OP_3 = \measuredangle BXC = \measuredangle EXF = \measuredangle EDF = 60°$$

folgt. Entsprechend ergibt sich $\measuredangle DFE = \measuredangle FED = 60°$. Das Dreieck DEF hat somit als ein dem Kreis k einbeschriebenes gleichseitiges Dreieck einen Flächeninhalt, der nicht von der Lage des Punktes X auf k abhängt. Dasselbe gilt folglich auch für das Dreieck ABC. □